

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

6-дәріс. Туынды ұғымы. Туындының физикалық және геометриялық мағынасы

Дәрістің мақсаты – Бір айнымалыдан тәуелді функцияның туындысын табу және оның геометриялық-физикалық мағынасын білу

Негізгі сұрақтар:

1. Туынды ұғымы.
2. Туындының физикалық мағынасы
3. Туындының геометриялық мағынасы

1 Туынды ұғымы

Туынды ұғымына келтіретін есептерді қарастырайық.

1.1 Жылдамдық туралы есеп

Материалдық нүкте түзу сызық бойымен қозғалыста болсын және t уақытта $S = S(t)$ жолды жүріп өтсін. t уақыттан бастап $t + \Delta t$ уақытқа дейінгі жүріп өткен жолы $S(t + \Delta t) - S(t) = \Delta S$ болады.

Онда осы уақыттағы орташа жылдамдық

$$v_{\text{орт}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

t мезгіліндегі лездік жылдамдық деп орташа жылдамдықтың $\Delta t \rightarrow 0$ ұмтылғандағы шегін айтады:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{орт}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Мысалы, егер материалдық нүкте $S = \frac{gt^2}{2}$ (еркін түсу заңымен) қозғалса, онда орташа жылдамдық мынаған тең:

$$v_{\text{орт}} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{g(t + \Delta t)^2/2 - gt^2/2}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Ал лездік жылдамдық:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt + \frac{g}{2} \Delta t \right) = gt.$$

1.2 Жанама туралы есеп

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің $U_\delta(x_0)$ аймағында анықталсын және $x = x_0$ нүктесінде үзіліссіз болсын. $y = f(x)$ функция графигіне $M_0(x_0, y_0)$ нүктесіндегі жанаманы қарастырайық.

x_0 аргументіне Δx өсімшесін ($0 < \Delta x < \delta$) береміз. $M_0(x_0, f(x_0))$ пен $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктелерінен өтетін түзу теңдеуі:

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0), \quad (1.1)$$

мұндағы $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \varphi$.

$\Delta x \rightarrow 0$, онда $\Delta y \rightarrow 0$, себебі $f(x)$ үзіліссіз және

$$M_0 M_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0.$$

$y = f(x)$ функция графигінің M_0 нүктесіндегі жанамасы деп қиюшының шектік орналасуын айтады. Егер $\Delta x \rightarrow 0$ болса, онда φ бұрышы α ұмтылады:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k = \tan \alpha, \quad (1.2)$$

шек бар болса, онда қиюшының шектік орны бар. Сонымен, егер (4.1.4) шек бар болса, онда бұрыштық коэффициенті k болатын M_0 нүктесінен өтетін жанама бар.

1.3 Туындының анықтамасы

Жоғарыдағы екі есептің шешуі функция өсімшесі мен аргумент өсімшесі арасындағы қатынастың шегін есептеуге алып келді. Бұл математикалық талдаудың негізгі ұғымдарының бірі – туынды ұғымына алып келеді.

$y = f(x)$ функциясы (a, b) интервалында анықталсын. Осы аралықтан x нүктесін алып, оған Δx өсімшесін $x + \Delta x \in (a, b)$ жататындай етіп береміз. Сонда $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, енді мына қатынасты түземіз:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Анықтама 1.1. Егер аргумент өсімшесі $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шекті шегі бар болса, онда оны $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы деп атайды.

Туындыны мына белгілердің біреуімен белгілейді:

$$f'(x) \quad \text{немесе} \quad y'(x) \quad (\text{Лагранж}), \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \text{немесе} \quad \frac{dy}{dx} \quad (\text{Лейбниц}).$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x).$$

1.4 Жанамалар мен нормальдер

Жоғарыдағы есептерге оралайық. Формуладан лездік жылдамдық жолдан уақыт бойынша алынған туындысына тең:

$$v(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}.$$

Екінші жанама туралы есептің формуласы бойынша туынды жанаманың бұрыштық коэффициенті болады:

$$k = \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Туындыны анықтауды, функцияны дифференциалдау, ал туындысы бар функцияны дифференциалданатын функция деп атайды.

$y = f(x)$ функциясына M_0 нүктесінде жүргізілген жанама теңдеуі:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (1.1)$$

ал осы нүктеде жүргізілген нормаль теңдеуі:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (1.2)$$

Егер бұрыштық коэффициенті $k = \tan \alpha = \infty$ болса, онда жанаманың теңдеуі $x = x_0$ болады.

1.5 Оң және сол жақ туындылар

Анықтама 1.2 (4.1.2). $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде оң және сол жақ туындылары деп $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасының оң және сол жақ шектерін атайды, оларды сәйкесінше

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_0(x_0 + 0) \quad \text{және} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_0(x_0 - 0)$$

белгілейді.

Егер $f'_0(x_0)$ туындысы бар болса, онда $f'_0(x_0 + 0)$, $f'_0(x_0 - 0)$ туындылар да бар және

$$f'_0(x_0 + 0) = f'_0(x_0 - 0) = f'_0(x_0) \quad (1.1)$$

теңдік орындалады.

Керісінше, егер x_0 нүктесінде оң және сол жақ туындылары бар болса және

$$f'_0(x_0 + 0) = f'_0(x_0 - 0),$$

онда $f'_0(x_0)$ туындысы да бар және (4.1.7) теңдік орындалады.

1.6 Қарапайым функциялардың туындылары

1. $y = C$ (C – константа). Аргументке Δx өсімшесін берсек, $\Delta y = C - C = 0$. Енді $\Delta x \rightarrow 0$ шекке өтсек:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Демек, $C' = 0$.

2. $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Онда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

Екі жағын да Δx -ке бөліп, $\Delta x \rightarrow 0$ шекке өтеміз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Демек, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

3. $y = \sin x$. Онда

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \frac{x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \frac{x + \Delta x}{2} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \cos x.$$

Демек, $(\sin x)' = \cos x$.

4. $y = \cos x$. Онда

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x.$$

Демек, $(\cos x)' = -\sin x$.

5. $y = a^x$, $0 < a \neq 1$. Онда

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Дербес жағдайда $y = e^x$, онда $(e^x)' = e^x$.

6. $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, $x > 0$. Аргументке Δx өсімшесін беріп:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Дербес жағдайда $y = \ln x$, онда $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Дифференциалданатын функция мен үзіліссіз функцияның арасындағы байланысты мына теорема береді.

Теорема 1.1 (1). Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде туындысы бар болса, онда функция осы нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі 1.1. Теорема шарты бойынша мына шек бар:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Шегі бар функцияны оның шегі мен қайсыбір шексіз аз шаманың қосындысы түрінде өрнектеуге болады:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

мұндағы $\Delta x \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

Немесе

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

осыдан

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Егер $\Delta x \rightarrow 0$, онда $\Delta y \rightarrow 0$, демек $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

2 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

- [1] Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 1-том. – 562 б. 2
- [2] Жәутіков О.А. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 832 б. 2
- [3] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1987. – 1-том. – 288 б. 2
- [4] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Ана тілі, 1991. – 2-том. – 400 б. 2
- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 1. – 616 с. 2
- [6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 2. – 448 с. 2
- [7] Зорич В.А. Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012. – Т. 1. – 702 с. 2
- [8] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1981. – Том 1. – 687 с. 2
- [9] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 1. – 680 с. 2
- [10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 2. – 802 с. 2

- [11] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с. 2
- [12] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с. 2
- [13] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – Том 1. – 400 с. 2
- [14] Сатыгулова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б. 2